Discrete calculus tools for image reconstruction with the Mumford-Shah functional

Marion Foare
with Jacques-Olivier Lachaud and Dorin Bucur

JIG 2015, Paris

07 Octobre 2015

Motivations

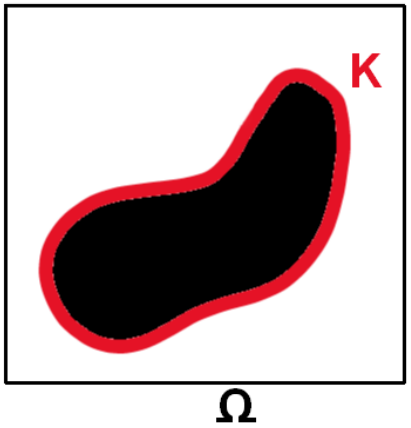
- Smooth reconstruction : denoising, inpainting ...

Intuitive energy

$$\mathcal{E}(K,u) = \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{fidelity}} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{smoothing}}$$

where :

- Ω is the image domain
- g is a grayscale image
- u is an approximation of g
- K is the set of contours



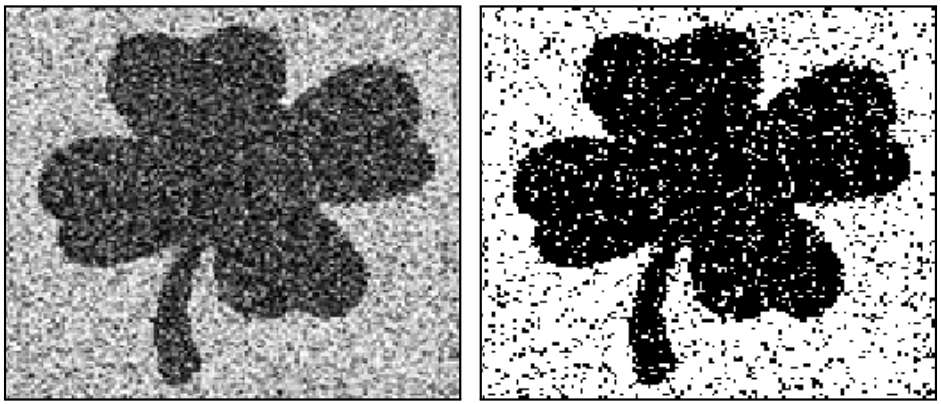
Intuitive energy

$$\mathcal{E}(K,u) = \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{fidelity}} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{smoothing}}$$

$\rightsquigarrow$ sensitive to noise

where :

- Ω is the image domain
- g is a grayscale image
- u is an approximation of g
- K is the set of contours



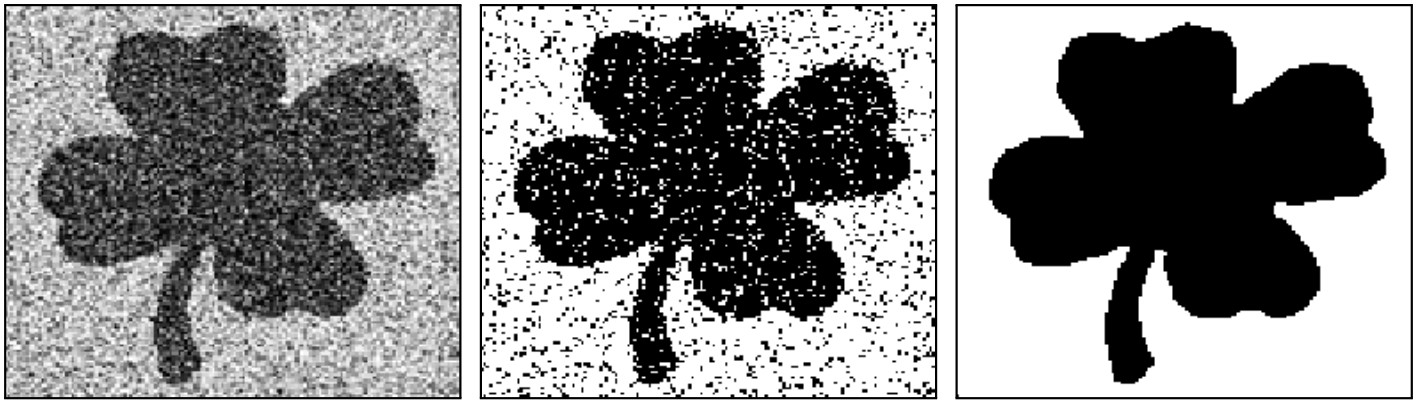
Isotropic Mumford-Shah functional

[Mumford and Shah, 1989]

$$\mathcal{MS}(K,u) = \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{fidelity}} + \alpha \underbrace{\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}_{\text{smoothing}} + \lambda \underbrace{\mathcal{H}^1(K\cap\Omega)}_{\text{length}}$$

where :

- Ω is the image domain
- g is a grayscale image ($g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$)
- u is an approximation of g ($u \in \mathrm{H}^1(\Omega\setminus K)$)
- K is the set of contours

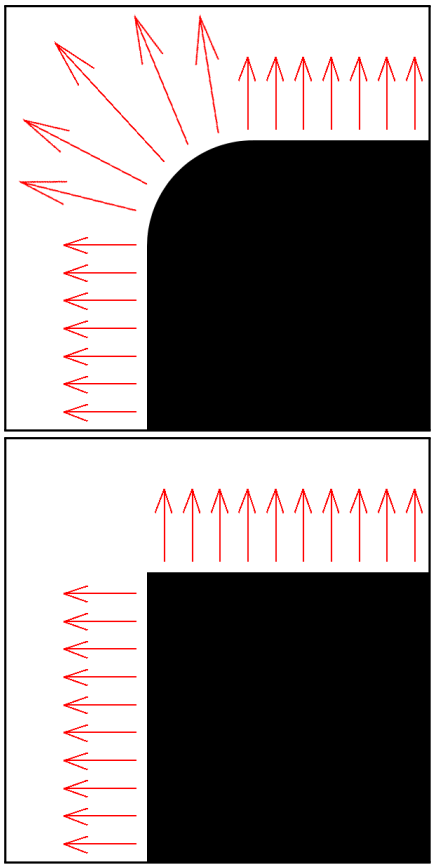


Anisotropic Mumford-Shah functional

$$\mathcal{MS}_\varphi(K,u) = \int_{\Omega\backslash K} |u-g|^2 \ \mathrm{d}x + \alpha \int_{\Omega\backslash K} |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \lambda \int_K \varphi(\nu) \ \mathrm{d}\mathcal{H}^1$$

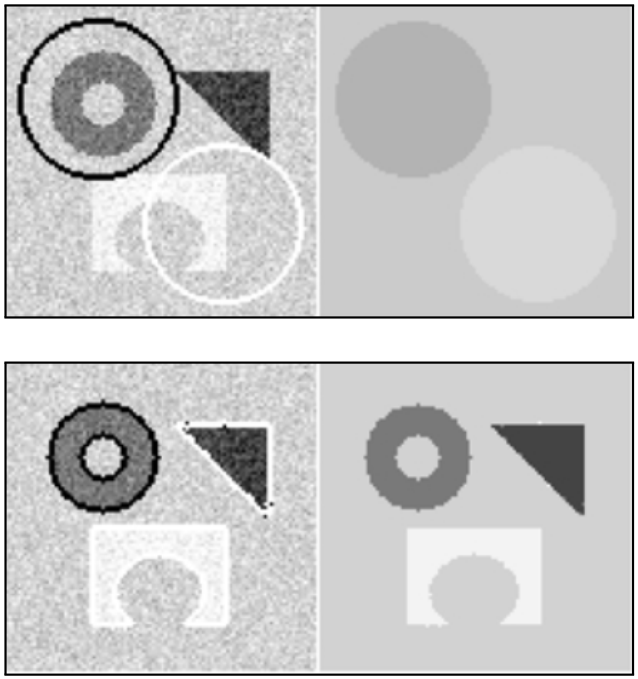
where :

- Ω is the image domain
- g is a grayscale image ($g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$)
- u is an approximation of g ($u \in \mathrm{H}^1(\Omega\backslash K)$)
- K is the set of contours
- φ is an anisotropic norm ($\varphi = \|.\|_2 \Rightarrow$ isotropic case)
- ν is the oriented normal



Different approximation methods

- **Level set :**



[Vese and Chan, 2002]

- **Phase field :**

- **TV :**

$\rightarrow$ staircasing effects

$\longrightarrow$ we want a smooth reconstruction that keeps and extracts the contours

SBV relaxation

$$\mathcal{MS}_\varphi(K,u) = \alpha \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, dx + \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_K \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\rightarrow$ shape optimisation problems

SBV relaxation

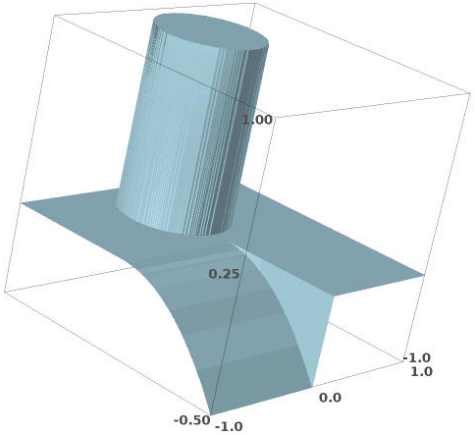
$$\mathcal{MS}_\varphi(K,u) = \alpha \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, dx + \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_K \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\rightarrow$ shape optimisation problems

Relaxation of the functional [De Giorgi et al., 1989]

$$MS_\varphi(u) = \alpha \int_{\Omega} |u-g|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$u \in \mathrm{SBV}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ : \ \nabla u$ is a finite Radon measure s.t. $\nabla u = D^a u + D^j u\}$



Γ-convergence

Γ-convergence

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$. A sequence of functions $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is said to Γ-converge to a function f in $\mathrm{L}^1(\Omega)$, and we note $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} f$, if for all $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$,

i) for every sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ such that $u_\varepsilon \to u$,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq f(u)$$

ii) there is a sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converging to u such that

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq f(u)$$

Minimizers convergence

Let (u_ε) be a sequence of minimizers of (f_ε) such that $u_\varepsilon \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} u$. Then u is a minimizer of f.

Ambrosio-Tortorelli functional

$$MS_\varphi(u) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

where $u \in \mathrm{SBV}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ : \ \nabla u$ is a finite Radon measure s.t. $\nabla u = D^a u + D^j u\}$

Ambrosio-Tortorelli functional

$$MS_\varphi(u) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

where $u \in \mathrm{SBV}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ : \ \nabla u$ is a finite Radon measure s.t. $\nabla u = D^a u + D^j u\}$

$\rightarrow$ Approximation of Ambrosio and Tortorelli

Anisotropic Ambrosio-Tortorelli functional [Focardi, 2001]

We define on $\mathrm{L}^1(\Omega)$ the functionals

$$AT_\varepsilon^\varphi(u,v) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} \, dx$$

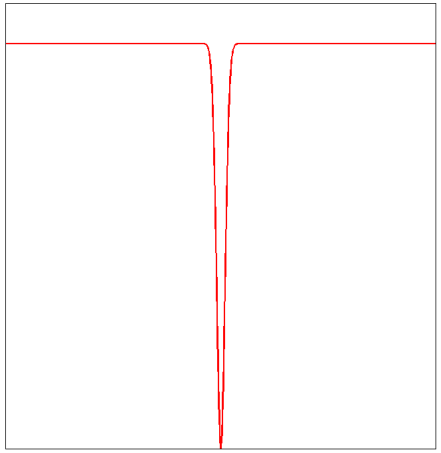
Then $AT_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{\Gamma} MS_\varphi$.

Ambrosio-Tortorelli functional

$$AT_\varepsilon^\varphi(u,v) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} \, dx$$

- g a grayscale image
- u an approximation of g
- v an approximation of the set of contours

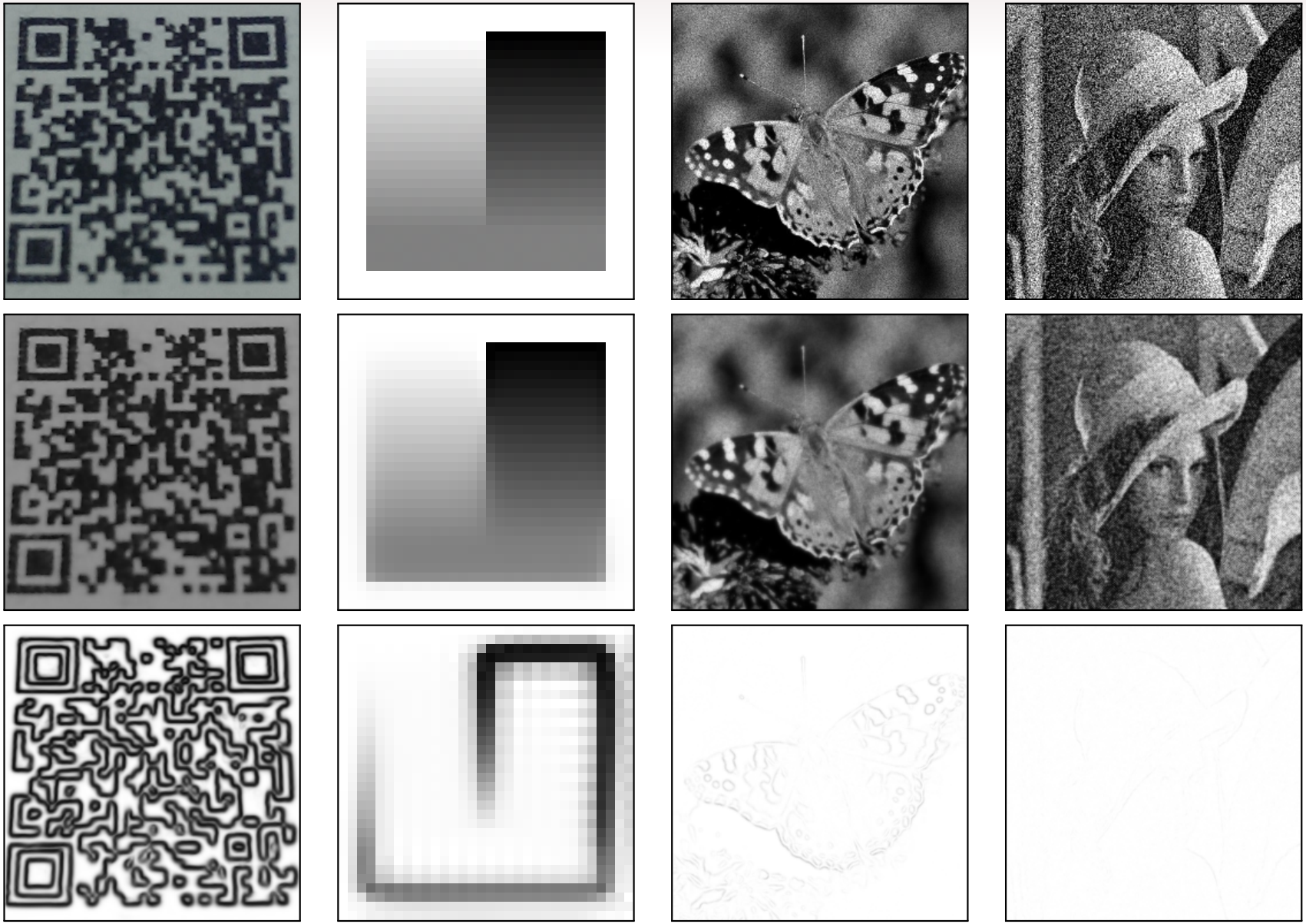
  - ▷ $v = 1$ where there is no contour, i.e. ∇u is low
  - ▷ v goes to 0 when there is a contour, i.e. ∇u is high



Data

u

v



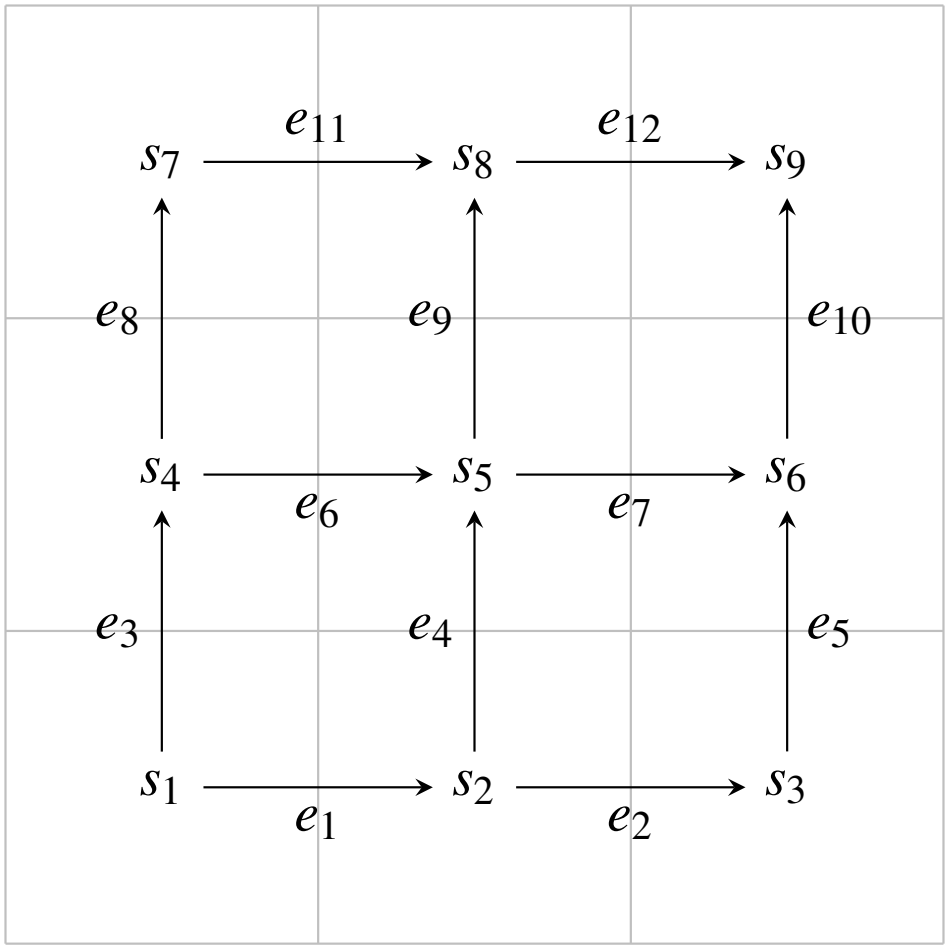
→ Problems with finite differences

→ Strong dependance to contrast

→ Strong dependance to noise

Principle

$$AT_\varepsilon^\varphi(u,v) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} \, dx$$



We define :

- u, g : 0-form $\to \mathbb{R}$ on the vertices s_i
- v : 1-form $\to \mathbb{R}$ on the edges e_j

and :

- A is the matrix such that $\nabla u = Au$
- B is the matrix such that $\nabla v = Bv$

[Grady and Polimeni, 2010]

Discrete AT_ε^φ

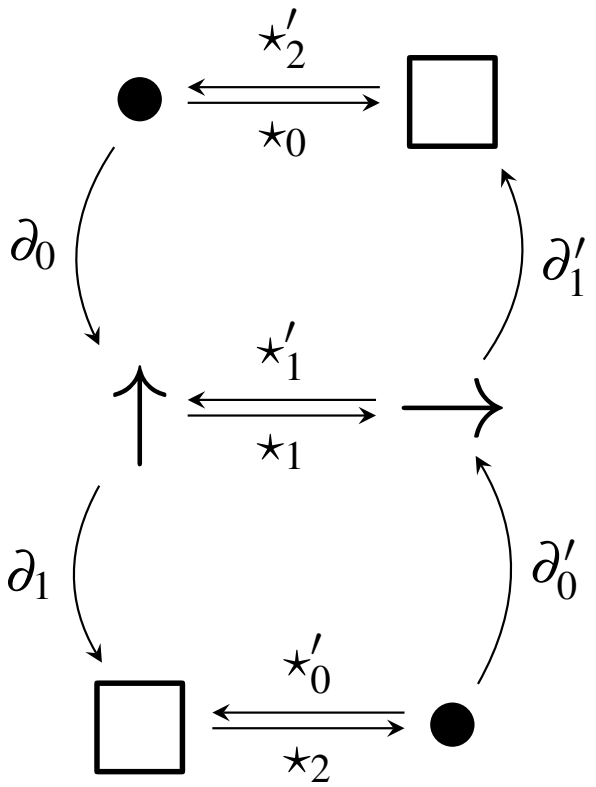
$$AT_\varepsilon^\varphi(u,v) = \alpha \int_\Omega |u-g|^2 \, dx + \int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega \varepsilon \varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{(1-v)^2}{4} \, dx$$

- $\alpha \int_\Omega (u-g)^2 \quad \rightarrow \quad \alpha (u-g)^T (u-g)$
- $\int_\Omega v^2 |\nabla u|^2 \quad \rightarrow \quad v^T v (Au)^T (Au) = (Au)^T \mathrm{diag}(v)^2 (Au)$
- $\lambda \varepsilon \int_\Omega \varphi^2(\nabla v) \quad \rightarrow \quad \lambda \varepsilon v^T B^T B v$ (isotropic case)
- $\frac{\lambda}{4\varepsilon} \int_\Omega (1-v)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1-v)^T (1-v)$

We have :

$$E_{AT}(u,v) = \alpha (u-g)^T (u-g) + (Au)^T \mathrm{diag}(v)^2 (Au) + \lambda \varepsilon v^T B^T B v + \frac{\lambda}{4\varepsilon} (1-v)^T (1-v)$$

Gradients and exterior derivatives



We define :

$$
\begin{aligned}
Au &= \partial_0 u \\
(Au)^T &= \star_2' \partial_1' \star_1 \partial_0 u \\
Bv &= \partial_1 v \\
(Bv)^T &= (\partial_0 \star_2' \partial_1' \star_1 + \star_1' \partial_0' \star_2 \partial_1) v
\end{aligned}
$$

+

Metric

- input image of size $N \times N$, $h = \dfrac{1}{N}$
- G_i is the weight matrix on $i-$forms

Then

$$\begin{aligned} \nabla u &= G_0 A G_1^{-1} A u \\ \nabla v &= (G_0 A G_1^{-1} A + G_1 B G_2^{-1} B) v \end{aligned}$$

[Grady and Polimeni, 2010]

Metric

- input image of size $N \times N$, $h = \dfrac{1}{N}$
- G_i is the weight matrix on $i-$forms

Then

$$\begin{aligned} \nabla u &= G_0 A G_1^{-1} A u \\ \nabla v &= (G_0 A G_1^{-1} A + G_1 B G_2^{-1} B) v \end{aligned}$$

[Grady and Polimeni, 2010]
As we want $\alpha \int_\Omega (u-g)^2 \, dx =$ cst in $[0,1]^2$, we choose $G_0 = h^2 Id$, $G_1 = hId$, and $G_2 = Id$.

Metric

- input image of size $N \times N$, $h = \dfrac{1}{N}$
- G_i is the weight matrix on $i-$forms

Then

$$\begin{aligned} \nabla u &= G_0 A G_1^{-1} A u \\ \nabla v &= (G_0 A G_1^{-1} A + G_1 B G_2^{-1} B) v \end{aligned}$$

[Grady and Polimeni, 2010]

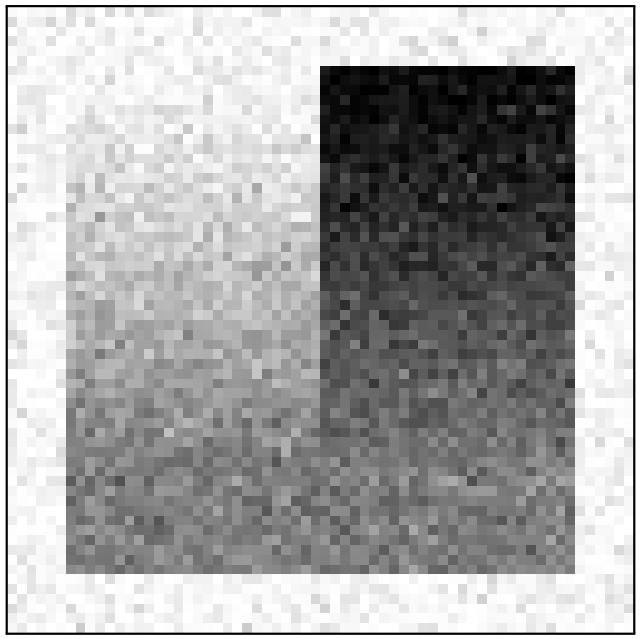
As we want $\alpha \int_\Omega (u-g)^2 \, dx = \text{cst}$ in $[0,1]^2$, we choose $G_0 = h^2 Id$, $G_1 = hId$, and $G_2 = Id$.

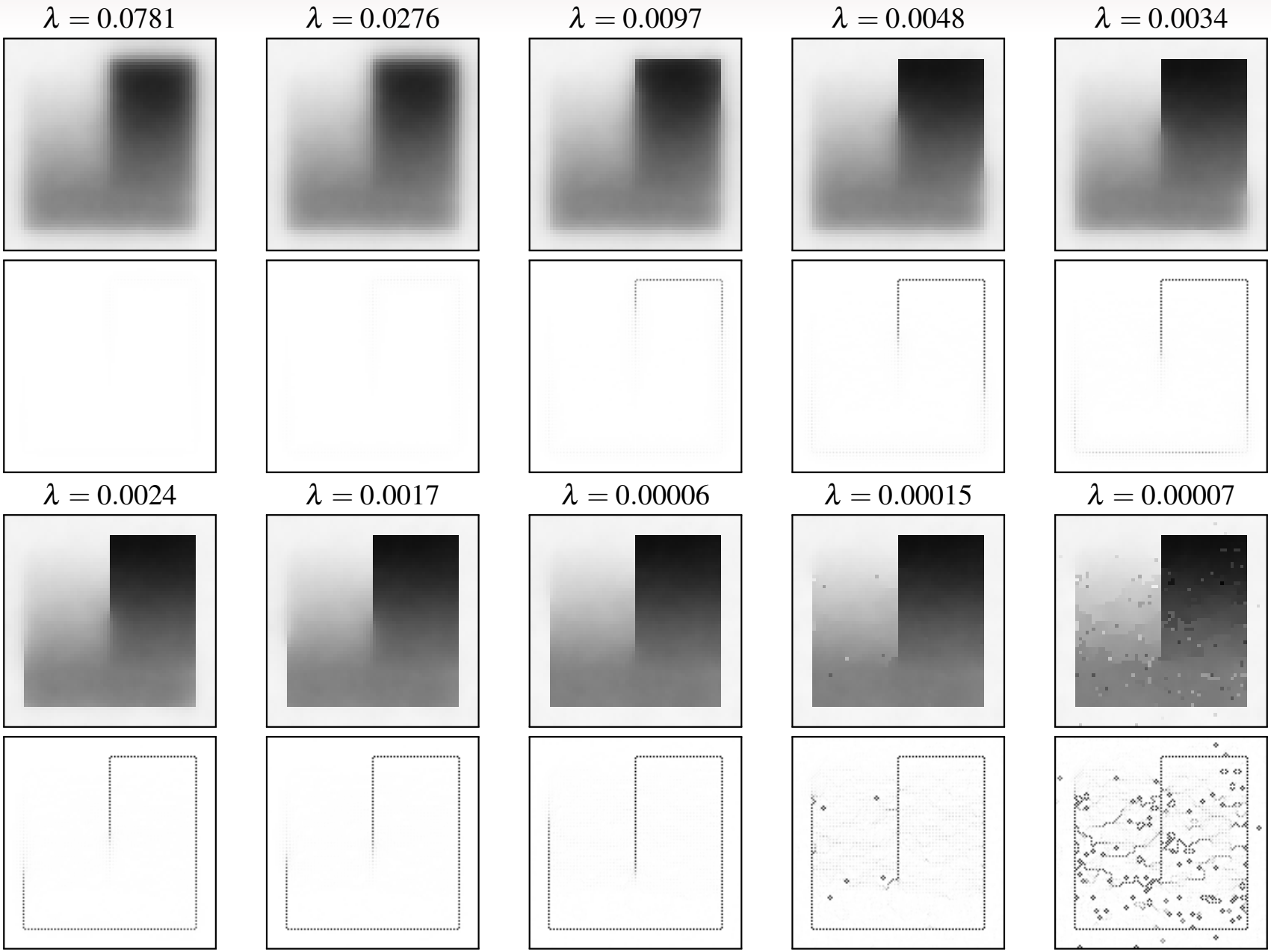
Finally :

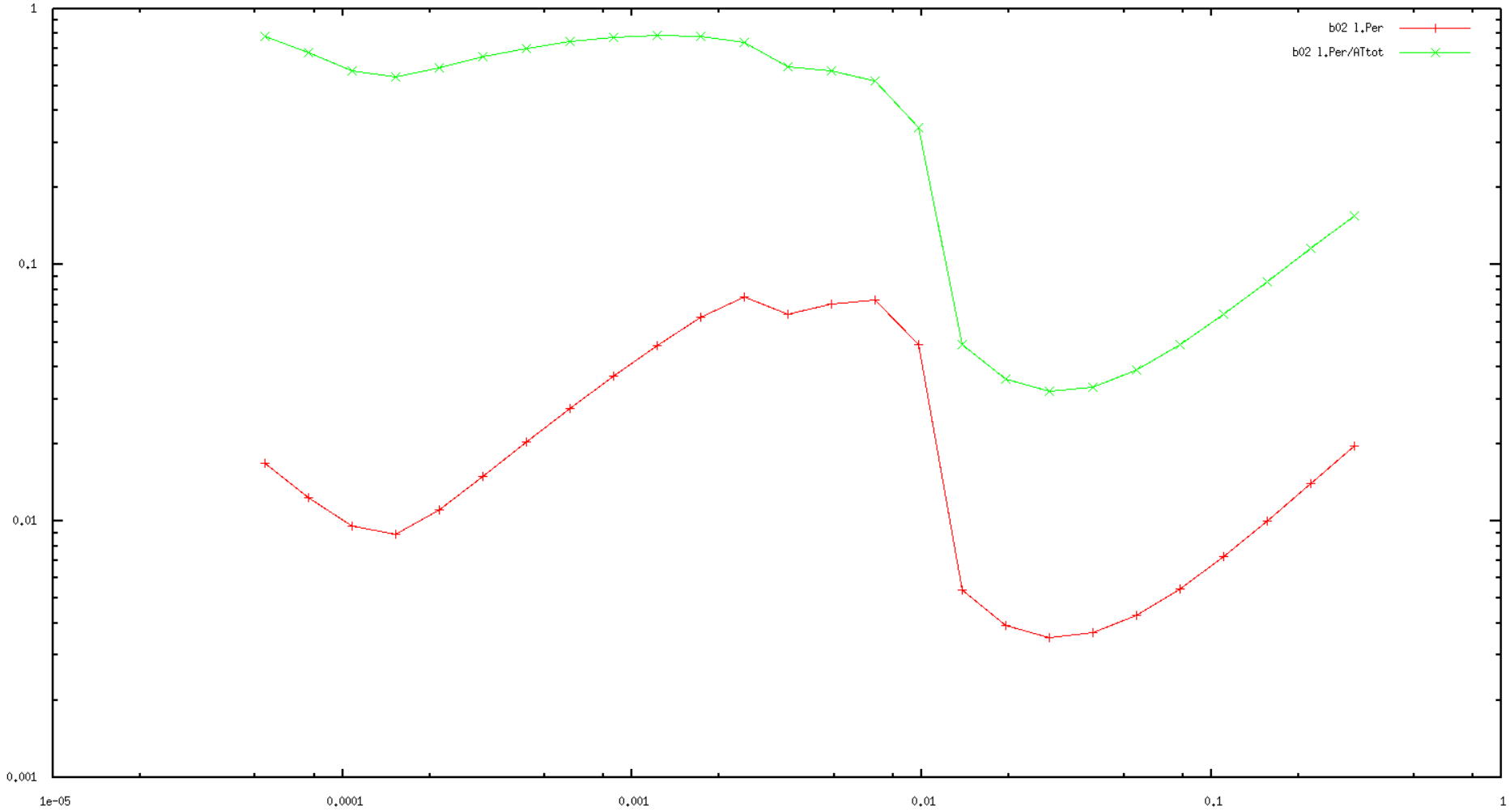
$$E_{AT}(u,v) = \alpha h^2 (u-g)^T (u-g) + h (Au)^T \text{diag}(v)^2 (Au) + \lambda \varepsilon h v^T B^T B v + \frac{\lambda h}{4\varepsilon} (1-v)^T (1-v)$$

First test

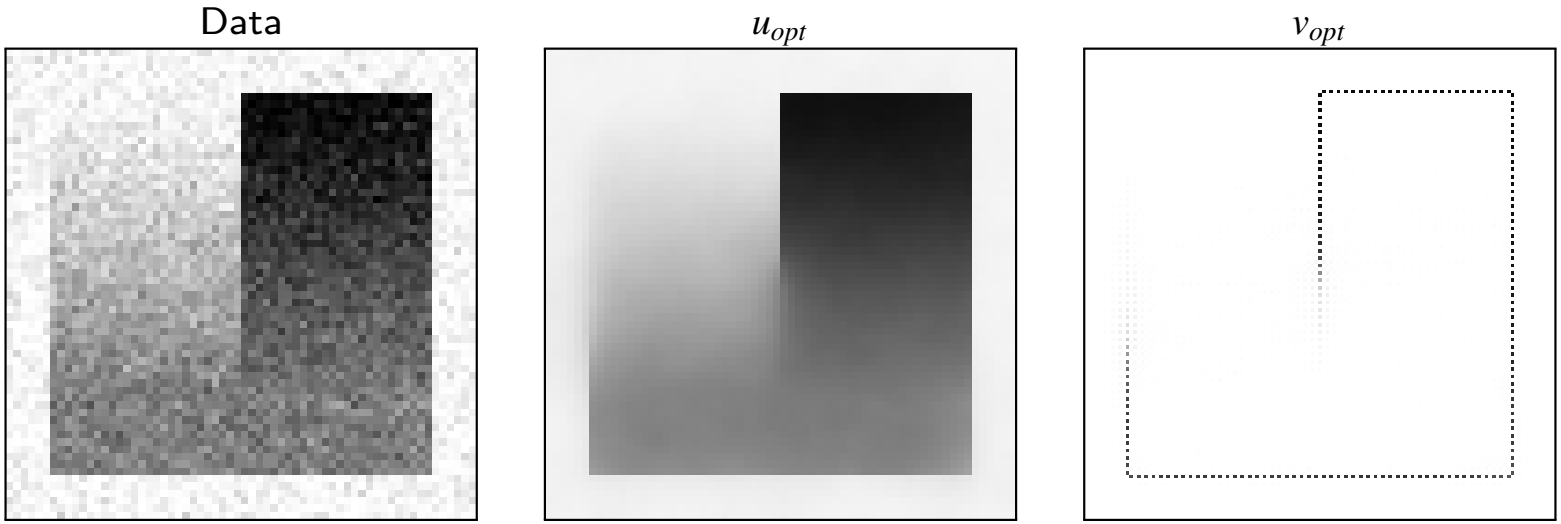
- Size : 64×64
- Noise : 0.2
- $\alpha = 8$

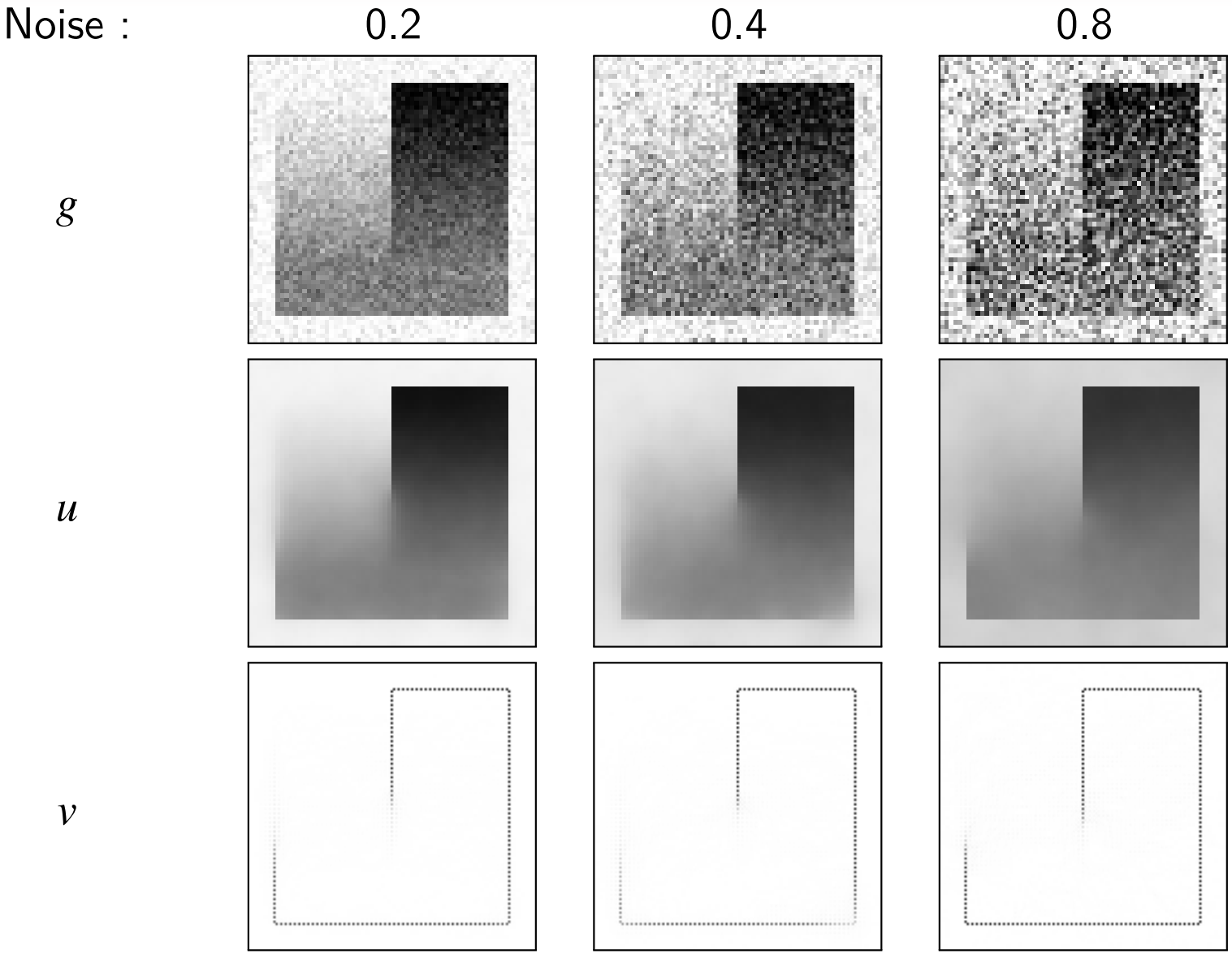


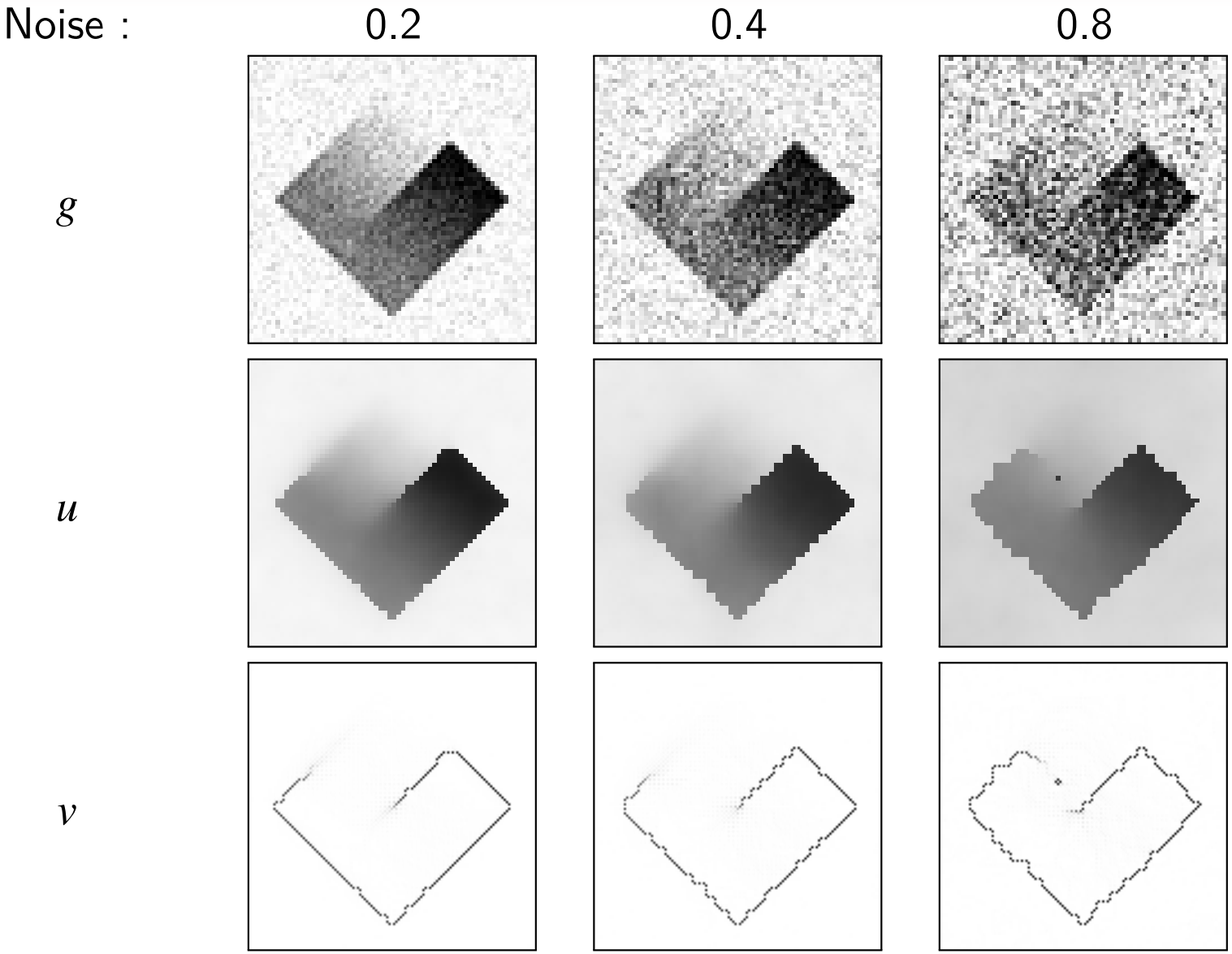

$\lambda = 0.0781$
$\lambda = 0.0276$
$\lambda = 0.0097$
$\lambda = 0.0048$
$\lambda = 0.0034$
$\lambda = 0.0024$
$\lambda = 0.0017$
$\lambda = 0.00006$
$\lambda = 0.00015$
$\lambda = 0.00007$

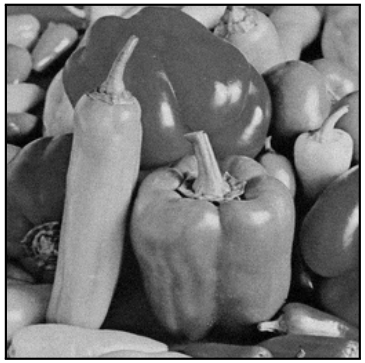
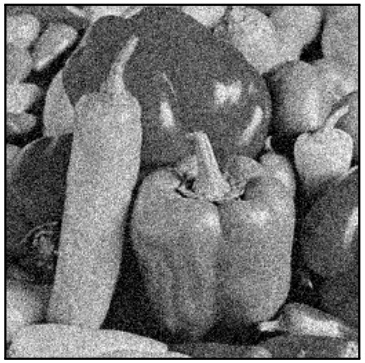
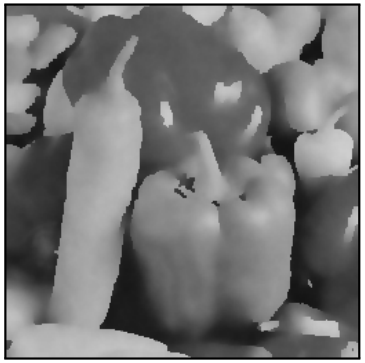
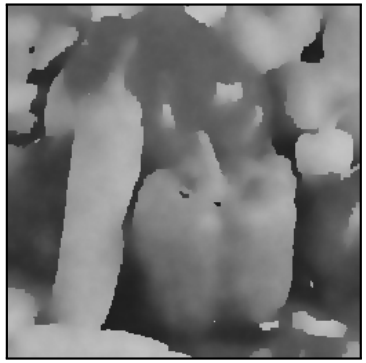

b02 l.Per
b02 l.Per/ATtot
1
0.1
0.01
0.001
1e-05
0.0001
0.001
0.01
0.1
1

Optimum




Noise :
0.2
0.4
0.8
g
u
v


Noise :
0.2
0.4
0.8
g
u
v

Noise :	0.05	0.2	0.4
g			
u			
v			

Conclusion

- Continue with discrete calculus tools
  - ▷ what about the anisotropic case ?

Conclusion

- Continue with discrete calculus tools
  - ▷ what about the anisotropic case ?
- Other applications :
  - ▷ Inpainting
  - ▷ Compression

Références

- Bucur, D. and Luckhaus, S. (2014). Monotonicity formula and regularity for general free discontinuity problems. Arch. Ration. Mech. Anal. 211 (2014) pp. 489–511.
- De Giorgi, E., Carriero, M., and Leaci, A. (1989). Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 108, pp. 195–218.
- Focardi, M. (2001). On the variational approximation of free-discontinuity problems in the vectorial case. World Scientific, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 11, No. 4, pp. 663–684.
- Grady, L. J. and Polimeni, J. (2010). Discrete calculus: Applied analysis on graphs for computational science. Springer Science & Business Media.
- Mumford, D. and Shah, J. (1989). Optimal Approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. Communications on pure and applied mathematics, Vol. 42, pp. 577–685.
- Vese, L. A. and Chan, T. F. (2002). A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. International journal of computer vision, 50(3):271–293.

- [ ] Espace BV
- [ ] Sauts de u
- [ ] Decomposition du gradient
- [ ] Espace SBV
- [ ] Propriétés de Gamma-convergence
- [ ] Formule de monotonie
- [ ] Théorème de Modica-Mortola isotrope
- [ ] Théorème de Modica-Mortola anisotrope
- [ ] Ambrosio-Tortorelli isotrope
- [ ] Ambrosio-Tortorelli anisotrope
- [ ] Exemple de construction des opérateurs bords pour une image 2×2

Fonction à variation bornée

Fonction à variation bornée

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ est une fonction à variation bornée sur Ω s'il existe une mesure de Borel μ (i.e. μ est une forme linéaire et continue sur $C^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ : \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$) telle que

$$-\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \ dx = \int_\Omega \varphi \cdot \ \mathrm{d}\mu \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

On définit alors la variation totale de u sur Ω par

$$|Du|(\Omega) = \sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \ dx$$

Et on note $\mathrm{BV}(\Omega)$ l'espace des fonctions à variation totale bornée sur Ω.

Ensemble des sauts

Ensemble des sauts

Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit la densité d'un point x par rapport à un ensemble mesurable E par

$$D(x,F) = \lim_{\rho \to 0} \frac{|E \cap \mathcal{B}_\rho(x)|}{|\mathcal{B}_\rho(x)|} = \delta \in [0,1],$$

quand cette limite existe.
Et on pose les limites approximatives (quand elles existent)

$$u^+(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ D(x,\{u > t\}) = 0\}$$
$$u^-(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \ : \ D(x,\{u < t\}) = 0\}$$

Par définition, l'ensemble des sauts de u est l'ensemble

$$\mathcal{J}_u := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ u^+(x) < u^-(x)\}$$

Décomposition du gradient

Décomposition du gradient

Soit $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$. Le gradient Du de u se décompose comme

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u$$

tel que pour tout ensemble borélien $B \subseteq \mathbb{R}^n$

i) $D^a u$ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et vérifie $D^a u(B) = \int_B \nabla u(x)\, dx$

ii) $D^j u$ est portée par $\mathcal{J}_u$ et vérifie $D^j u(B) = \int_{B \cap \mathcal{J}_u} (u^+(x) - u^-(x))\nu(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}$ où pour $x \in \mathcal{J}_u$ $\mathcal{H}^{n-1} -$ $p.p.$, $\forall t \in [u^-(x), u^+(x)]$, $\nu_u(x) = \nu_{\{u>t\}}(x)$ désigne le champ de vecteurs normaux à $\mathcal{J}_u$

iii) $D^c u$ est singulière avec la mesure de Lebesgue et s'annule sur les ensembles qui sont des réunions dénombrables de sous-ensembles de mesure $\mathcal{H}^{n-1}$ finie.

Fonction spéciale à variation bornée

Fonction spéciale à variation bornée

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ est une fonction spéciale à variation bornée sur Ω si $D^c u = 0$. On note $\mathrm{SBV}(\Omega)$ l'espace des fonctions spéciales à variation bornée sur Ω.

$\square$

Propriétés de Γ-convergence

Soit (f_ε) une suite qui Γ-converge vers une fonction f dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Convergence des minimiseurs

Et soit (u_ε) une suite de minimiseurs de (f_ε) telle que $u_\varepsilon \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} u$. Alors u est un minimiseur de f.

Semi-continuité inférieure

f est semi-continue inférieurement sur $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Stabilité de la somme

Et soit $g : \mathrm{L}^1(\Omega) \to [0, +\infty[$ une fonction continue. Alors $f_\varepsilon + g \xrightarrow{\Gamma} f + g$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

$\square$

Formule de monotonie

Formule de monotonie [Bucur and Luckhaus, 2014]

Soit $u \in \mathrm{SBV}(\Omega)$ un presque-quasi minimiseur d'un problème variationnel d'inconnue (K,u) en 0. Alors

$$\rho \mapsto E(\rho) := \min\left\{ \frac{\int_{\mathcal{B}_\rho(0)} |\nabla u|^2 \ \mathrm{d}x + \mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u \cap \bar{\mathcal{B}}_\rho(0))}{\rho^{N-1}} \ , \ \frac{c_N \Lambda^{2-N}}{N-1} \right\} + (N-1)\frac{c_\alpha}{\alpha}\rho^\alpha$$

est croissante sur $[0, d_{\partial\Omega}(0)]$.

$\square$

Théorème de Modica-Mortola isotrope

Théorème de Modica-Mortola [?]

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Et soient $W : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction s'annulant seulement en 0 et 1, et $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ telle que $u \in \{0, 1\}$ $p.p.$
On considère les fonctionnelles

$$P_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left[\varepsilon \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right] \, dx$$

et

$$P(u) = C_0 |Du|(\Omega)$$

où $C_0 = 2 \int_0^1 \sqrt{W(s)} \, ds$.

Alors $P_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} P$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Théorème de Modica-Mortola anisotrope

Théorème de Modica-Mortola anisotrope [?]

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Et soient $W : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ une fonction s'annulant seulement en 0 et 1, et $u \in \mathrm{SBV}(\Omega)$ telle que $u \in \{0,1\}$ $p.p.$
On considère les fonctions

$$P_\varepsilon^\varphi(u) = \int_\Omega \left[\varepsilon \varphi^2(\nabla u) + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right] \, dx$$

et

$$P_\varphi(u) = C_0 \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

où $C_0 = 2 \int_0^1 \sqrt{W(s)} \, ds$.

Alors $P_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{\Gamma} P_\varphi$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli isotrope

Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli isotrope [?]

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Et soit $V : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction s'annulant seulement en 1.
On considère les fonctionnelles définies sur $\mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^1(\Omega)$ par

$$G_\varepsilon(u,v) = \int_\Omega \left[v^2 |\nabla u|^2 + \varepsilon \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} V(v) \right] \, dx \quad \text{si } u,v \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega) \text{ et } 0 \leq v \leq 1$$

et

$$G(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + 4C_V \, d\mathcal{H}^{N-1}(\mathcal{J}_u) \quad \text{si } u \in \mathrm{SBV}(\Omega) \text{ et } v = 1 \ p.p.$$

où $C_V = 2\int_0^1 \sqrt{V(s)} \, \mathrm{d}s$.

Alors $G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli anisotrope

Fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli anisotrope [Focardi, 2001]

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Et soit $V : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction s'annulant seulement en 1.
On considère les fonctionnelles définies sur $\mathrm{L}^1(\Omega) \times \mathrm{L}^1(\Omega)$ par

$$G_\varepsilon^\varphi(u,v) = \int_\Omega \left[v^2|\nabla u|^2 + \varepsilon\varphi^2(\nabla v) + \frac{1}{\varepsilon}V(v) \right] dx \quad \text{si } (u,v) \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^n) \times \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$$

$$\text{et } 0 \leq v \leq 1$$

et

$$G_\varphi(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\mathcal{J}_u} \varphi(\nu_u) \, d\mathcal{H}^{N-1} \quad \text{si } u \in \mathrm{SBV}(\Omega) \text{ et } v = 1 \ p.p.$$

où $C_V = 2\int_0^1 \sqrt{V(s)} \, ds$.

Alors $G_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{\Gamma} G_\varphi$ dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, "e_3"] \arrow[d, "e_1"'] & s_3 \arrow[d, "e_2"] \\ s_2 \arrow[r, "e_4"'] & s_4 \end{tikzcd}$$

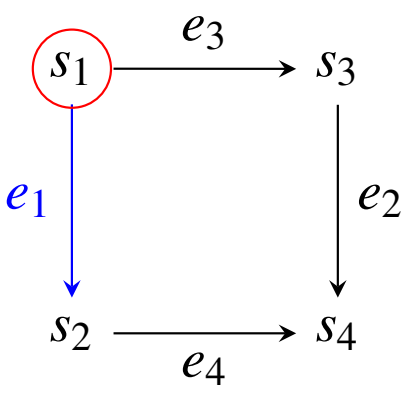
$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

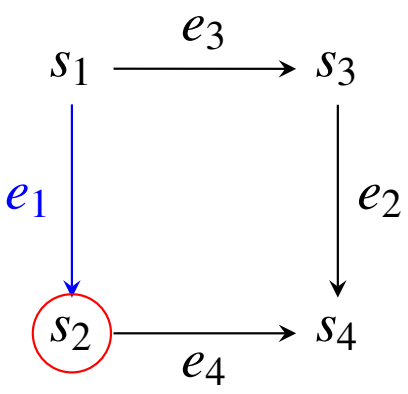
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$



Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

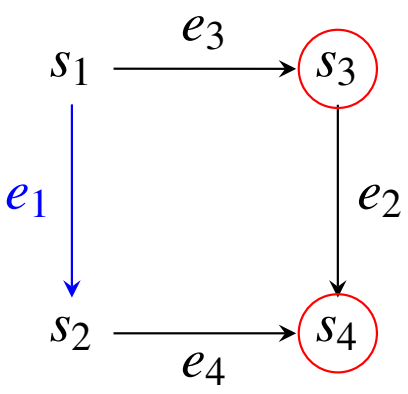


$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

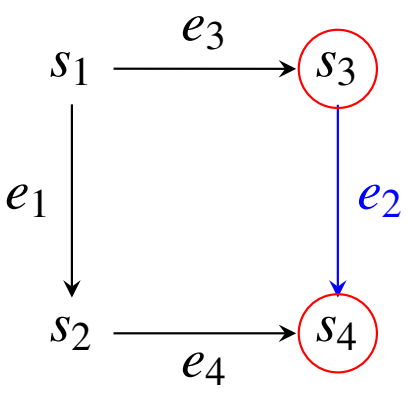


$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

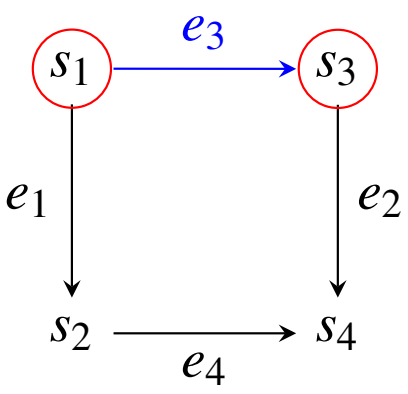


$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

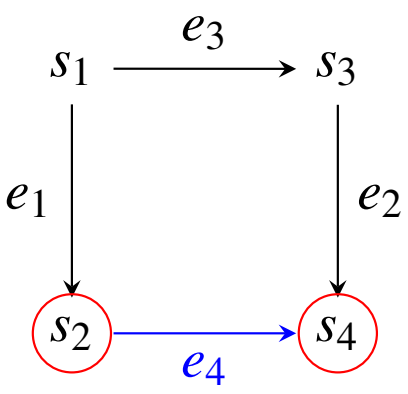


$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets

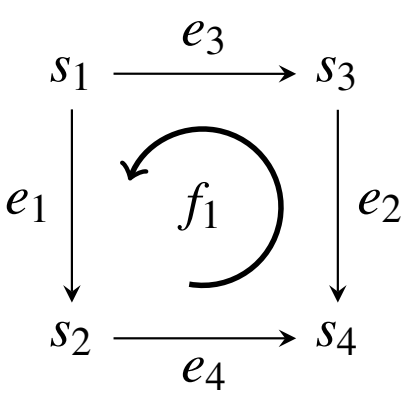
- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets



- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

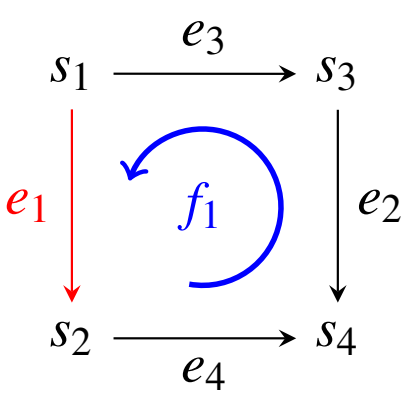
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

- Matrice d'incidence des $1-$cellules (arêtes) vers les $2-$cellules (faces) :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets



- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

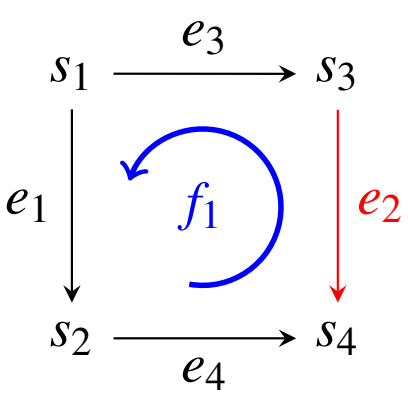
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

- Matrice d'incidence des $1-$cellules (arêtes) vers les $2-$cellules (faces) :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets



- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

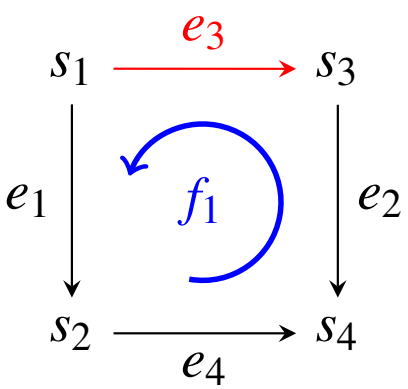
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

- Matrice d'incidence des $1-$cellules (arêtes) vers les $2-$cellules (faces) :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets



- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

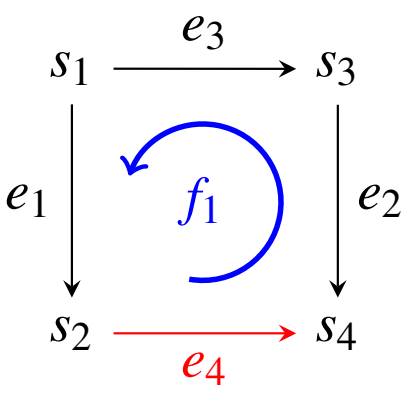
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

- Matrice d'incidence des $1-$cellules (arêtes) vers les $2-$cellules (faces) :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \end{array}$$

Opérateurs bords

Exemple pour 4 sommets



- Matrice d'incidence des $0-$cellules (nœuds) vers les $1-$cellules (arêtes) :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

- Matrice d'incidence des $1-$cellules (arêtes) vers les $2-$cellules (faces) :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \end{array}$$